数理解析研究所講究録
447巻 1981年 8-16

曲線とそのヤコビ多様体の定義体について

中大 理工　関口 力

[6]により，筆者は non-hyperelliptic な曲線とその偏極ヤコビ多様体の field of moduli が一致することを任意標数でなりたつことを示したのであるが，最近の Oort-Steenbrink の結果[5]を用いることにより，標数2を除いて，任意の曲線について field of moduli の一致に関する簡単な証明を与えることの出来ることを示す。詳しい内容については，近いうちに出される[7]を御参照願いたい。

§1. Fields of moduli

以下，非特異な射影曲線を単に曲線と呼ぶことにする。

定義 P を体 k 上のある構造をもった代数多様体としたとき，k に含まれる体 k_P が P の field of moduli とは次の性質を満すときを言う。

Ω を，k を含む universal domain としたとき，

i) 任意の元 $\sigma \in Aut(\Omega)$ に対し，

$$(P\otimes_k \Omega)^\sigma \cong P\otimes_k \Omega \iff \sigma \in Aut(\Omega/k_P),$$

ii) $\displaystyle\bigcap_{\substack{k' \subset k \\ \exists P'/k' \text{ s.t. } P'\otimes_{k'}\bar{k} \simeq P\otimes_{k}\bar{k}}} k' \qquad = k_P$.

この定義は，小泉［3］によるものであり，標数0の場合は，k_Pは i) だけで特徴づけられる。

<u>定理 1.1</u>. 偏極アーベル多様体あるいは曲線Pに対し，その field of moduli k_P が存在する。

<u>注意</u>. field of moduli k_P は P の定義体の下極限であり，k_Pは，一般には，P の定義体とはなり得ない．（志村［8］参照．）

<u>§2. Fields of moduli に関する問題点</u>

以下，$A_{g,d,n}$ を次数 d の polarization と level n-structure をもつ次元 g のアーベル多様体のモジュライ空間，$M_{g,n}$ を level n-structure をもつ種数 g の曲線のなすモジュライ空間とする。特に，$n=1$ のとき，$A_{g,d} = A_{g,d,1}$ ，$M_g = M_{g,1}$ とおく。

<u>問題1</u>. P を体 k 上の次元 g の偏極アーベル多様体，C を k 上の種数 g の曲線とし，x を P に対応する $A_{g,1}$ 上の点，c を C に対応する $M_{g,1}$ 上の点としたとき，

$$k_P = \mathbb{k}(x) \ , \quad k_C = \mathbb{k}(c)$$

がなりたつか。

<u>問題2</u>. 曲線 C に対し，その偏極ヤコビ多様体を $P(C) =$

$(J(C), \lambda(C))$ としたとき，

$$k_C = k_{P(C)}$$

がなりたつか。

§3. 問題1について

標数0の場合，問題1は古典的であり，Baily，志村，松阪により，肯定的に別々に証明された。体 k の標数 p が正の場合，この問題はいまだ完全には解決されておらず，いまのところ，次の定理が一般の解答と思われる。

定理 3.1. $n \geqq 3$ とし，$\pi : A_{g,1,n} \longrightarrow A_{g,1,1}$ を自然な写像，$\pi(y) = x$ $(y \in A_{g,1,n})$，$S'' = \mathrm{Spec}(\Bbbk(y) \otimes_{\Bbbk(x)} \Bbbk(y)) \underset{p_2}{\overset{p_1}{\rightrightarrows}} \mathrm{Spec}(\Bbbk(y)) = S'$ を各成分への射影としたとき，次は同値である。

i) $\Bbbk(y)$ は $\Bbbk(x)$ 上分離的である。

ii) $p_1^*(P)$ と $p_2^*(P)$ は同形である。

iii) $k_P = \Bbbk(x)$。

これより容易に次の定理を得る。

定理 3.2. k を標数 p の体，$P = (X, \lambda)$ を k 上 g 次元の偏極アーベル多様体としたとき，次の条件のうち1つが満されるならば，$k_P = \Bbbk(x)$ がなりたつ。

i) X : ordinary，

ii) $p > 2g+1$，

iii) $p > g+1$ かつ P : indecomposable。

実際，X が ordinary であれば，Serre-Tate の lifting の理論が使え，定理 3.1 の (ii) のなりたつことがわかる。また，$Aut(P)$ の位数の素因数は，必ず $2g+1$ 以下であり，P が indecomposable であれば，$g+1$ 以下であることに注意すれば，これ等の場合，定理 3.1 の (i) がなりたち，定理 3.2 を得る。

定理 3.1 の証明はここでは省略し，またの機会に譲ることにする。

§4. 問題2について

C が non-hyperelliptic であるか，種数が 3（2でも同様）であれば，$k_C = k_{P(C)}$ のなりたつことを［6］により示したのであるが，［5］を用いれば，結果は次のように一般化される。

定理 4.1. k を標数 p の体，C を k 上の曲線とし，$p=2$ のときは，C は non-hyperelliptic と仮定する。$P(C)=(J(C),\lambda(C))$ を C の偏極ヤコビ多様体とする。k_0 を k の部分体とし，$P(C) \cong P \otimes_{k_0} k$ となる k_0 上の主偏極アーベル多様体 P_0 が存在するならば，k_0 上の曲線 C_0 が存在し，$C_0 \otimes_{k_0} k \simeq C$ となる。特に，$k_C = k_{P(C)}$ がなりたつ。

証明は次のように行なわれる。

先ず，Grothendieck［2］の理論により，S を noetherian scheme，C，C' を S 上の曲線，P，P' を S 上の偏極アーベル

多様体としたとき，関手

$$T \longmapsto \mathrm{Isom}_T(C\times_S T,\ C'\times_S T)$$

$$T \longmapsto \mathrm{Isom}_T(P'\times_S T,\ P\times_S T)$$

を表現するS上の scheme $\mathbf{Isom}_S(C, C')$，$\mathbf{Isom}_S(P', P)$ の存在することがわかる。ここで更に，Deligne-Mumford [1] の手法により次がわかる。

定理 4.2. $\mathbf{Isom}_S(C, C')$, $\mathbf{Isom}_S(P', P)$ はS上 finite，unramified である。

この定理と，Weil, Matsusaka, Martens 等による Torelli の定理の結果を組み合わすことにより，次の結果を得る。

定理 4.3. $J=\mathrm{Pic}^0 : \mathbf{Isom}_S(C, C') \longrightarrow \mathbf{Isom}_S(P(C'), P(C))$ は closed immersion である。

更に，ここで次の Oort-Steenbrink の結果を用いる。

定理 4.4 (Oort-Steenbrink [5]) $n \geq 3$ とし，$(C, \alpha) \longmapsto (C, -\alpha)$ で定義される involution を $\iota : M_{g,n} \longrightarrow M_{g,n}$ とおく。ここで，α は曲線 C の level n-structure である。このとき，Torelli map により定義される写像

$$J_n : M_{g,n}/\langle \iota \rangle \otimes \mathbb{Z}[\tfrac{1}{2}] \longrightarrow A_{g,1,n} \otimes \mathbb{Z}[\tfrac{1}{2}] = A^{(2)}_{g,1,n}$$

は locally closed immersion となる。更に，$M_{g,n}/\langle \iota \rangle$ の non-hyperelliptic point では，標数2においても，J_n は locally closed immersion である。

このOort-Steenbrinkの結果を用いることにより，次の結果が得られる。

<u>定理 4.5.</u> C, C' を noetherian scheme S 上の曲線とする。

(i) C, C' が non-hyperelliptic であれば，自然な写像

$$J : \mathrm{Isom}_S(C, C') \longrightarrow \mathrm{Isom}_S(P(C'), P(C))/\{\pm 1\}$$

は同形を与える。

(ii) C, C' が hyperelliptic であり，かつ，S が $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\frac{1}{2}])$ 上の scheme であれば，

$$J : \mathrm{Isom}_S(C, C') \longrightarrow \mathrm{Isom}_S(P(C'), P(C))$$

は同形を与える。

この定理を用いることにより，定理 4.1 は次のように導かれる。

$$S' = \mathrm{Spec}\, k \longrightarrow S = \mathrm{Spec}\, k_0, \quad S'' = S' \times_S S' \underset{p_2}{\overset{p_1}{\rightrightarrows}} \mathrm{Spec}\, k$$

とおく。簡単の為，C を hyperelliptic と仮定して議論する。non-hyperelliptic の場合も，単に技術的な問題だけで同様に証明がなされる。

このとき，定理 4.5 により，

$$J : \mathrm{Isom}_{S''}(p_1^* C, p_2^* C) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Isom}_{S''}(p_2^* P(C), p_1^* P(C))$$

は同形である。仮定により，k_0 上の主偏極アーベル多様体 P が存在することより，P を与える descent data $\varphi \in \mathrm{Isom}_{S''}(p_2^* P(C), p_1^* P(C))$ (S''-valued point) が存在する。即ち，$\Delta : S' \to S''$:

対角写像，$p_{ij}: S'\times_S S'\times_S S' \longrightarrow S''$ ：(i,j)-成分への射影としたとき，

$$\Delta^*\varphi = \mathbb{1}_{P(C)},\quad p_{13}^*\varphi = p_{12}^*\varphi \circ p_{23}^*\varphi$$

がなりたつ。J が同形であるから，φ に対応する C の descent data $\sigma \in \mathrm{Isom}_{S''}(p_1^*C, p_2^*C)$ （S''-valued point）が存在し，この σ により，C は $S=\mathrm{Spec}\, k_0$ 上に descent され，我々の結果を得る。

定理4.5の証明．簡単の為，C，C′ を hyperelliptic と仮定して議論する。

$H_{g,1,n}$ を，principal polarization，linear rigidification，level n-structure をもつ g 次元のアーベル多様体のなす fine moduli space とし，

$$\pi : H_{g,1,4} \longrightarrow H_{g,1,1} \otimes \mathrm{Spec}\, \mathbb{Z}[\tfrac{1}{2}] = H_{g,1,1}^{(2)}$$

を自然な写像とする。このとき，π は principal covering with Galois group $Sp(g, \mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ を与える。

ここで，S を適当に小さくとれば，$P(C')$ は linear rigidification ϕ をもち，$(P(C'),\phi)$ は $H_{g,1,1}^{(2)}$ 上の S-valued point u を定める。この u を用いて，fibre product

$$\begin{tikzcd} S' = S \times_{H_{g,1,1}^{(2)}} H_{g,1,4} \arrow[r, "u'"] \arrow[d, "\pi'"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & H_{g,1,4} \arrow[d, "\pi"] \\ H_{g,1,4} \arrow[r, "u"] & H_{g,1,1}^{(2)} \end{tikzcd}$$

をとれば，$\mathcal{U}'$ は $(P(C')\times_S S', \alpha)$ （α は level 4-structure）を与える。（$C'_{S'} = C'\times_S S'$, α ）の定める $M_{g,4}$ 上の点を $a : S' \longrightarrow M_{g,4}$ とおく。

任意の S'-scheme $f : S'' \to S'$ と，任意の S''-valued point

$$\tau : S'' \longrightarrow \mathrm{Isom}_{S'}(P(C'_{S'}), P(C_{S'}))$$

に対し，$\tau(\alpha\times_{S'} S'')$ は $P(C_{S''})$ の level 4-structure を与える。従って，$(C_{S''}, \tau(\alpha\times_{S'} S''))$ は S''-valued point $b : S'' \longrightarrow M_{g,4}$ を定める。更に，$\tau : (P(C'_{S''}), \alpha\times_{S'} S'') \xrightarrow{\sim} (P(C_{S''}), \tau(\alpha\times_{S'} S''))$ であるから，Oort-Steenbrink の結果，定理 4.4 により

$$J_4(a\circ f) = J_4(b)$$

から

$$a\circ f = b$$

を得る。従って，同形

$$\phi : (C_{S''}, \tau(\alpha\times_{S'} S'')) \xrightarrow{\sim} (C'_{S''}, \alpha\times_{S'} S'')$$

が存在し，$J(\phi) : \alpha\times_S S'' \xrightarrow{\sim} \tau(\alpha\times_{S'} S'')$ より，Serre の定理と rigidity により，$J(\phi) = \tau$ を得る。このことは，

$$J : \mathrm{Isom}_{S''}(C_{S''}, C'_{S''}) \longrightarrow \mathrm{Isom}_{S''}(P(C'_{S''}), P(C_{S''}))$$

が全射であることを意味し，このことと，定理 4.3 を組み合わせれば，

$$J_{S'} : \mathrm{Isom}_{S'}(C_{S'}, C'_{S'}) \longrightarrow \mathrm{Isom}_{S'}(P(C'_{S'}), P(C_{S'}))$$

が同形であることがわかる。更に，$S' \longrightarrow S$ が faithfully flat

であることに注意すれば，descentの理論により，同形

$$J : \mathrm{Isom}_S(C, C') \xrightarrow{\sim} \mathrm{Isom}_S(P(C'), P(C))$$

を得る。

References

[1] P. Deligne and D. Mumford, The irreducibility of the space of given genus, Publ. Math. 36(Volume dedicated to O. Zariski), L.H.E.S.(1969), 75-109.

[2] A. Grothendieck, Fondements de la géométrie algébrique, Séminaire Bourbaki, 1952-62, Secrétariat Math., Paris (1962).

[3] S. Koizumi, The fields of moduli for polarized abelian varieties and for curves, Nagoya Math. J., 48(1972),37-55.

[4] T. Matsusaka, On a theorem of Torelli, Amer. J. Math. 80 (1958), 784-800.

[5] F. Oort and J. Steenbrink, The local Torelli problem for algebraic curves, Univ. Utrecht, Dep. Math., Preprint Nr. 136, 1979.

[6] T. Sekiguchi, The coincidence of fields of moduli for non-hyperelliptic curves and for their jacobian varieties, Nagoya Math. J., 82(1981), 57-82.

[7] T. Sekiguchi, On the fields of rationality for curves and for their jacobian varieties, to appear.

[8] G. Shimura, On the field of rationality for an abelian variety, Nagoya Math. J., 45(1972), 167-178.

[9] A. Weil, Zur Beweis des Torellischen Satzen, Nachr. Akad. Wissensch. Göttingen, (1957), 33-53.